



TITLE:

# On p-adic Poincaré series and equations defining Shimura curves

AUTHOR(S):

栗原, 章

---

CITATION:

栗原, 章. On p-adic Poincaré series and equations defining Shimura curves. 代数幾何学シンポジウム記録 1993, 1993: 77-95

ISSUE DATE:

1993

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/214601>

RIGHT:

On  $p$ -adic Poincaré series and equations defining Shimura curves

日本女子大学 理学部 数物科学科 栗原 章

kurihara@tansei.cc.u-tokyo.ac.jp

## 1 序

$p$  を素数とし、 $\Gamma$  を  $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$  の torsion-free discrete subgroup で  $\Gamma \backslash PGL_2(\mathbb{Q}_p)$  が compact なものとする。Mumford の  $p$  進上半平面を  $\mathcal{P}(\Delta)$  と書くことにする ([10])。  $\mathcal{P}(\Delta)$  は  $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$  が作用する  $\mathbb{Z}_p$  上の formal scheme である。  $\mathcal{P}(\Delta)$  の  $\Gamma$  による商を  $P_\Gamma$  とすると、これは  $\mathbb{Z}_p$  上の曲線である。  $\omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbb{Z}_p}$  を dualizing sheaf とする。整数  $k \geq 0$  に対して、  $\mathbb{Z}_p$ -module  $H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbb{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma$  は  $\Gamma$  に関する重さ  $2k$  の保型形式のなす空間である。

この報告では、適当な条件を満たす  $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma$  ( $r \geq 1$ ) と整数  $k_1, \dots, k_r \geq 1$  に対して、  $p$  進 Poincaré 級数  $\varphi_\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_r; k_1, \dots, k_r)$  を定義し、それを調べる。  $p$  進 Poincaré 級数  $\varphi_\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_r; k_1, \dots, k_r)$  は重さ  $2k$  (但し、  $k = k_1 + \dots + k_r$ ) の  $\Gamma$  に関する保型形式となるが、  $k \geq 1$  に対して、  $H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbb{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma$  はこのような  $p$  進 Poincaré 級数たちで張られることが分かる。

$B$  を  $\mathbb{Q}$  上の定符号四元数環で、  $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$  となるものとする。上記  $\Gamma$  を  $B^\times/\mathbb{Q}^\times$  の部分群であると仮定する。  $k \geq 1$  に対して、 de Shalit ([3]) による Eichler-志村 同型

$$I : H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbb{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\cong} H^1(\Gamma, V_{2k-2})$$

がある。ここで、  $V_{2k-2}$  は  $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$  の  $2k-2$  次の対称テンソル表現である。表現  $V_{2k-2}$  は  $\mathbb{Q}$ -structure  $V_{2k-2, \mathbb{Q}}$  を持ち、従って、  $H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbb{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$  も  $H^1(\Gamma, V_{2k-2, \mathbb{Q}})$  に対応して  $\mathbb{Q}$ -structure を持つ。  $\varphi \in H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbb{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma$  に対して、  $I(\varphi)$  は  $\varphi$  に付随する  $\mathcal{P}(\Delta)$  上の  $V_{2k-2}$ -valued のある微分形式の vanishing cycle たち上での residue たちで与えられる。  $p$  進 Poincaré 級数  $\varphi$  に対して、これら residue は公式  $\sum_{n \geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$  のみを用いて有限の形に表わされることが分かり、その結果

$$I(\varepsilon\varphi) \in H^1(\Gamma, V_{2k-2, \mathbb{Q}}) \quad (\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_p^\times, \varepsilon^2 \in \mathbb{Q}^\times)$$

となる。  $\varepsilon\varphi$  を有理化された  $p$  進 Poincaré 級数と呼ぶことにする。 Hecke 作用素の有理化された  $p$  進 Poincaré 級数への作用は  $H^1(\Gamma, V_{2k-2}, \mathbf{Q})$  への作用を考えることにより、 rational arithmetic の範囲内で計算することができる。

$B$  の極大整環  $\mathcal{O}$  をとり、

$$\Gamma(1) = \left\{ \gamma \in \mathcal{O} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z} \left[ \frac{1}{p} \right] \mid N_{B/\mathbf{Q}}(\gamma) = 1 \right\} / \{\pm 1\}$$

とおく。 Čerednik ([1, 2]) により  $P_{\Gamma(1)}$  は以下のように志村曲線 ([12, 13]) である。  $\widehat{B}$  を  $\mathbf{Q}$  上の不定符号四元数環で  $\widehat{B}$  の判別式が  $p$  と  $B$  の判別式との積に等しいものとする。  $\widehat{\mathcal{O}}$  を  $\widehat{B}$  の極大整環とする。 同型  $\widehat{B} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong M_2(\mathbf{R})$  を固定し、

$$\widehat{\Gamma(1)} = \left\{ \gamma \in \widehat{\mathcal{O}} \mid N_{\widehat{B}/\mathbf{Q}}(\gamma) = 1 \right\} / \{\pm 1\}$$

とおく。  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  を  $\widehat{\Gamma(1)}$  に対応する志村曲線とすると、これは  $\mathbf{Q}$  上の代数曲線であるが、  $P_{\Gamma(1)} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$  は  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  と  $\mathbf{Q}_p$  の不分岐二次拡大上で同型である。 この同型を用いて、  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  の定義方程式を計算することを試みる。

不定符号四元数環  $\widehat{B}$  の判別式が 39 のときの志村曲線  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  の例を後で与える。 この例に関しては、環  $\bigoplus_{k \geq 0} H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p}^{\otimes k})^{\Gamma(1)}$  の生成元を有理化された  $p$  進 Poincaré 級数の  $\mathbf{Q}$  係数一次結合として与え、それらの local expansion を  $p$  ( $= 3, 13$ ) の適当な巾を法として計算し、それを用いて、ある Hecke common eigenform たちの満たす  $\mathbf{Q}_p$  上の代数方程式の係数の  $p$  進近似値を求める。 これらの係数の適当な比は有理数であるが、我々は  $p$  進近似値からその有理数が何であるか候補を得る。 これから、志村曲線  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  の  $\mathbf{Q}$  上の定義方程式を得る。(従って、厳密な意味では証明にはなっていない。)

志村曲線  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  の定義方程式のいくつかの例は [7, 6] で与えられていた。 それらの例について  $\widehat{B}$  の判別式は 6, 10, 14, 15, 21, 22, 33, 46 であったが、  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  の種数は高々 1 であった。 次の表のように、いくつかの例が上記の判別式 39 のときと同様に計算された。 森田[9]によって、志村曲線  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  は判別式を割らない素数  $\ell$  については good reduction を持ち、従って Hasse  $L$  の Euler factor は 重さ 2 の保型形式に作用する Hecke operator  $T(\ell)$  によって記述される。 次の表の曲線についてはこの条件は多くの素数  $\ell$  について満たされている。 従って、非常に確からしいのである。

橋本-村林 [4] は志村曲線  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  を二つの Humbert surface の intersection として考察している。

$\widehat{B}$ の判別式	$S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ の種数	$S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ の定義方程式
6	0	$x^2 + y^2 + 3 = 0$
10	0	$x^2 + y^2 + 2 = 0$
14	1	$(x^2 - 13)^2 + 7^3 + 2y^2 = 0$
15	1	$(x^2 + 243)(x^2 + 3) + 3y^2 = 0$
21	1	$x^4 - 658x^2 + 7^6 + 7y^2 = 0$
22	0	$x^2 + y^2 + 11 = 0$
26	2	$y^2 = -13^2x^6 - 24x^4 + 19x^2 - 2$
33	1	$x^4 + 30x^2 + 3^8 + 3y^2 = 0$
34	1	$\begin{cases} y^2 &= -(44x^2 - 68x + 27) \\ w^2 &= x^2 + 1 \end{cases}$
35	3	$\begin{cases} y^2 &= x \\ w^2 &= -(7x + 1)(x^3 + 197x^2 + 51x + 7) \end{cases}$
38	2	$y^2 = -19x^6 - 82x^4 - 59x^2 - 16$
39	3	$\begin{cases} y^2 &= 2x^2 + 6x + 5 \\ w^2 &= -(3x^2 + 12x + 13)(x^2 + 12x + 39) \end{cases}$
46	1	$(x^2 - 45)^2 + 23 + 2y^2 = 0$
51	3	$\begin{cases} y^2 &= -x \\ w^2 &= -(x - 3)(243x^3 - 235x^2 - 31x - 1) \end{cases}$
55	3	$\begin{cases} y^2 &= 4x^2 + 1 \\ w^2 &= -(3x^2 - x + 1)(x^2 + x + 3) \end{cases}$
57	3	$\begin{cases} y^2 &= -(43x^2 + 16x + 4) \\ w^2 &= (4x - 1)(4x^3 + 24x - 1) \end{cases}$
58	2	$-2y^2 = 29^2x^6 + 431x^4 + 39x^2 + 1$
62	3	$\begin{cases} y^2 &= x \\ w^2 &= -(64x^4 + 99x^3 + 90x^2 + 43x + 8) \end{cases}$
65	5	$\begin{cases} x^2 - x - 3 &= y^2 + 3yz + z^2 \\ xz &= y \\ -2w^2 &= 5x^2 - 11x - 1 + 9y^2 + 11yz + 3z^2 \end{cases}$

## 2 $p$ 進 Poincaré 級数

まず、Mumford curve ([10]) について少し復習しておく。  $p$  を素数とする。  $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$  の Bruhat-Tits building を  $\Delta$  と書くことにする。  $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$  は左から  $\Delta$  に作用する。  $\Delta$  の頂点の集合と向き付けられた edge の集合をそれぞれ  $Ver(\Delta)$  と  $Edge(\Delta)$  と書くことにする。  $PGL_2(\mathbf{Z}_p)$  の全ての元によって固定される頂点を  $v_0$  とし、  $v_0$  から始まり  $\begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix}$   $v_0$  で終わる edge を  $\sigma_0$  とする。  $\sigma \in Edge(\Delta)$  に対して、その始点と終点をそれぞれ  $o(\sigma)$  と  $t(\sigma)$  と表わすことにする。更に、  $\sigma = [o(\sigma), t(\sigma)]$  とも書くことにする。  $\sigma \in Edge(\Delta)$  の逆向きの edge を  $\bar{\sigma}$  と書くことにする。

射影直線  $P = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}_p}^1 = \text{Proj } \mathbf{Z}_p[X_1, X_2]$  と  $P_\eta = \mathbf{P}_{\mathbf{Q}_p}^1 = \text{Proj } \mathbf{Q}_p[X_1, X_2]$  を考える。  $X_1, X_2$  は射影座標で、これに関して  $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$  は  $P_\eta$  に左から作用する。環  $A_\eta = \mathbf{Q}_p[X_1^2, X_1X_2, X_2^2]$  を考える。  $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$  は  $A_\eta$  に右から作用する。  $A_\eta$  の部分環  $A_{v_0} = \mathbf{Z}_p[X_1^2, X_1X_2, X_2^2]$  と  $A_{\sigma_0} = \mathbf{Z}_p[pX_1^2, X_1X_2, X_2^2]$  を考える。  $v \in Ver(\Delta)$  に対して、  $g \in PGL_2(\mathbf{Q}_p)$  を  $v = gv_0$  となるようにとり  $A_v = (g^{-1})^* A_{v_0} \subset A_\eta$  また、  $P_v = \text{Proj } A_v$  とおく。  $P_v^{imm}$  を

$$P_v^{imm} = P_v \setminus \left( P_v \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p \text{ のすべての } \mathbf{F}_p\text{-rational points} \right)$$

によって定義する。同様に、  $\sigma \in Edge(\Delta)$  に対して、  $g \in PGL_2(\mathbf{Q}_p)$  を  $\sigma = g\sigma_0$  となるようにとり  $A_\sigma = (g^{-1})^* A_{\sigma_0} \subset A_\eta$  とおく。  $A_{\bar{\sigma}} = A_\sigma$  である。  $P_\sigma = \text{Proj } A_\sigma$  とおく。  $P_\sigma$  の special fibre は交わる二本の  $\mathbf{F}_p$ -射影直線からなる。  $P_\sigma^{imm}$  を

$$P_\sigma^{imm} = P_\sigma \setminus \left( P_\sigma \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p \text{ の double point でないすべての } \mathbf{F}_p\text{-rational points} \right)$$

によって定義する。  $v \in Ver(\Delta)$  に対する  $P_v^{imm}$  と  $\sigma \in Edge(\Delta)$  に対する  $P_\sigma^{imm}$  を貼り合わせて separated scheme  $P(\Delta)$  を得る。

$$P(\Delta) = \bigcup_{v \in Ver(\Delta)} P_v^{imm} \cup \bigcup_{\sigma \in Edge(\Delta)} P_\sigma^{imm}$$

$P(\Delta)$  の special fibre に沿った formal completion  $\mathcal{P}(\Delta)$  が Mumford の  $p$  進上半平面である。

$\Gamma$  を  $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$  の torsion-free discrete subgroup で  $\Gamma \backslash PGL_2(\mathbf{Q}_p)$  が compact なものとする。すると、商  $\Gamma \backslash P(\Delta)$  を得るが、これは algebrize される。即ち、  $\mathbf{Z}_p$ -proper scheme  $P_\Gamma$  でその special fibre に沿った formal completion が  $\Gamma \backslash \mathcal{P}(\Delta)$  と同型となるものが唯一つ存在する。

少し言葉を導入する。  $v_1, v_2 \in \text{Ver}(\Delta)$  に対して、 oriented edge  $\{\sigma_n\}_{1 \leq n \leq d}$  で  $v_1 = o(\sigma_1), t(\sigma_n) = o(\sigma_{n+1})$  ( $1 \leq n \leq d-1$ ),  $\sigma_n \neq \overline{\sigma_{n+1}}$  ( $1 \leq n \leq d-1$ ),  $v_2 = t(\sigma_d)$  となるものが存在するとき、  $v_1$  と  $v_2$  の距離は  $d$  であるといい、  $\text{dist}(v_1, v_2) = d$  と記す。  $\Delta$  の二つの部分複体  $S_1, S_2$  に対しては  $\text{dist}(S_1, S_2) = \min\{\text{dist}(v_1, v_2) | v_1 \in S_1, v_2 \in S_2\}$  とおく。

列  $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$  (但し、  $\sigma_n \in \text{Edge}(\Delta)$ ) は  $t(\sigma_n) = o(\sigma_{n+1})$  ( $n \geq 1$ ) かつ  $\sigma_n \neq \overline{\sigma_{n+1}}$  ( $n \geq 1$ ) のとき *infinite path* と呼ばれる。

二つの infinite path  $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$  と  $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$  に対して、  $\sigma_{s+j} = \tau_{t+j}$  ( $j \geq 0$ ) となる  $s, t \geq 1$  があるとき、これらは *equivalent* であるという。

infinite path の equivalence class と  $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$  の点とは一対一に対応する。(対応するものどうしは  $\text{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$  において等しい固定化群を持つ。) infinite path に対応する点はその limit point という。

列  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$  ( $\sigma_n \in \text{Edge}(\Delta)$ ) は  $t(\sigma_n) = o(\sigma_{n+1})$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) で  $\sigma_n \neq \overline{\sigma_{n+1}}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) のとき *doubly infinite path* と呼ばれる。

点  $\alpha, \beta \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$  ( $\alpha \neq \beta$ ) に対して、 doubly infinite path  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$  で  $\{\overline{\sigma_{-n}}\}_{n \geq 1}$  の limit point が  $\alpha$  で  $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$  の limit point が  $\beta$  となるものが唯一つ存在する。この doubly infinite path を  $[\alpha, \beta]$  と記す。

$\omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p}$  を  $\mathcal{P}(\Delta)$  の  $\mathbf{Z}_p$  上の dualizing sheaf とする。点  $\alpha, \beta \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$  ( $\alpha \neq \beta$ ) に対して、  $s(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{z-\beta} - \frac{1}{z-\alpha}\right) dz$  とおく。ここで、  $z = X_1/X_2$ 。

次のことが分かる。

**Proposition 2.1** 次が成り立つ。

- (1)  $s(\alpha, \beta) \in H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p})$
- (2) 頂点  $v$  に対応する  $\mathcal{P}(\Delta)$  の成分での  $s(\alpha, \beta)$  の *vanishing order* は  $\text{dist}(v, [\alpha, \beta])$  である。

さて、  $p$  進 Poincaré 級数を定義する。  $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma$  ( $r \geq 1$ ) が与えられているとする。ここで、  $\gamma_i \neq 1$  ( $i = 1, \dots, r$ ) とする。  $\alpha_i$  と  $\beta_i$  をそれぞれ  $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$  における  $\gamma_i$  の repulsive fixed point 及び attractive fixed point とする。従って、特に  $\gamma_i^* s(\alpha_i, \beta_i) = s(\alpha_i, \beta_i)$  である。  $\{\alpha_i, \beta_i\} \cap \{\alpha_j, \beta_j\} = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) と仮定する。整数  $k_1, \dots, k_r \geq 1$  が与えられているとする。  $k = k_1 + \dots + k_r$  また  $s = s(\alpha_1, \beta_1)^{k_1} \dots s(\alpha_r, \beta_r)^{k_r}$  とおく。

このとき、 $p$  進 Poincaré 級数  $\varphi_\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_r; k_1, \dots, k_r)$  を次で定義する。

$$\varphi_\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_r; k_1, \dots, k_r) = \begin{cases} \sum_{\gamma \in \langle \gamma_1 \rangle \backslash \Gamma} \gamma^* s & (r = 1 \text{ のとき}) \\ \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* s & (r \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで、 $\gamma_1$  によって生成される無限巡回群を  $\langle \gamma_1 \rangle$  とした。

**Proposition 2.2**  $\varphi_\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_r; k_1, \dots, k_r) \in H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbb{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma$

$k = 1$  のときは、このような  $p$  進 Poincaré 級数は既に [8] に表われている。対応  $\gamma \mapsto \varphi_\Gamma(\gamma; 1)$  は  $\gamma \in \Gamma$  について加法的である。

**Proposition 2.3** 各  $k \geq 1$  に対して、 $H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbb{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma$  はこのような  $p$  進 Poincaré 級数で張られる。

### 3 Eichler-志村 同型 と Residue

まず Eichler-志村 同型 ([3]) について復習する。 $v \in \text{Ver}(\Delta)$  と  $\sigma \in \text{Edge}(\Delta)$  に対して、 $V_{v,2k}, V_{\sigma,2k}, V_{2k}$  をそれぞれ  $A_v, A_\sigma, A_\eta$  の次数が  $2k$  の部分とする。 $z = X_1/X_2$  とおいていたが、混乱を避けるために  $u = X_1$  及び  $v = X_2$  と書くことにする。すると、

$$V_{2k} = \mathbb{Q}_p u^{2k} + \mathbb{Q}_p u^{2k-1}v + \dots + \mathbb{Q}_p uv^{2k-1} + \mathbb{Q}_p v^{2k}$$

は  $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$  の  $2k$  次の対称テンソル表現である。 $U_v$  を  $P_v^{\text{imm}}$  のその special fibre に沿った formal completion とする。各  $v \in \text{Ver}(\Delta)$  に対して、 $U_v$  上の coherent sheaf  $V_{v,2k} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{U_v}$  及び  $V_{v,2k} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \omega_{U_v/\mathbb{Z}_p}$  が考えられる。 $\eta = (u-vz)^2/dz$  とおく。すると  $k \geq 0$  と  $v \in \text{Ver}(\Delta)$  に対して  $\eta^k \in H^0(U_v, V_{v,2k} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \omega_{U_v/\mathbb{Z}_p}^{\otimes(-k)})$  である。

$k \geq 1$  についての  $\varphi \in H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbb{Z}_p}^{\otimes k})$  と  $\sigma \in \text{Edge}(\Delta)$  に対して、residue  $\text{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi) \in V_{\sigma,2k-2}$  は次のように定義される。まず、 $o(\sigma) = v_0$  であると仮定する。すると、

$$\left. \frac{\eta^{k-1}\varphi}{dz} \right|_{U_{v_0}} \in H^0(U_{v_0}, V_{v_0,2k-2} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{U_{v_0}}) = V_{v_0,2k-2} \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^0(U_{v_0}, \mathcal{O}_{U_{v_0}})$$

であるから  $\eta^{k-1}\varphi|_{U_{v_0}}$  は次のような表示を持つ。

$$\eta^{k-1}\varphi|_{U_{v_0}} = \left\{ \sum_{a \in \mathbb{F}_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{a,n}}{(z - \alpha(a))^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{\infty,n}}{(\frac{1}{z} - \frac{1}{\beta})^n} \right\} dz$$

ここで、各  $a \in \mathbf{F}_p$  に対して、 $\alpha(a) \in \mathbf{Z}_p$  は  $a$  の持ち上げとしそれを固定する。また、 $c_{a,n}, c_{\infty,n} \in V_{v_0, 2k-2}$  であって

$$\begin{aligned} c_{a,n} &\rightarrow 0 \quad \text{各 } a \in \mathbf{F}_p \text{ について } n \rightarrow \infty \text{ のとき} \\ c_{\infty,n} &\rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき} \end{aligned}$$

である。この様な表示を  $\eta^{k-1}\varphi$  の  $v_0$  における *local expansion* と呼ぶことにする。次のようにおく。

$$\begin{aligned} \text{Res}_{v_0, a}(\eta^{k-1}\varphi) &= c_{a,1} \quad (\text{各 } a \in \mathbf{F}_p \text{ について}) \\ \text{Res}_{v_0, \infty}(\eta^{k-1}\varphi) &= - \sum_{a \in \mathbf{F}_p} c_{a,1} \end{aligned}$$

一方、次のような自然な全単射がある。

$$\begin{aligned} \{\sigma \in \text{Edge}(\Delta) \mid o(\sigma) = v_0\} &\xrightarrow{D} \mathbf{P}^1(\mathbf{F}_p) = \mathbf{F}_p \cup \{\infty\} \\ t(\sigma) = \begin{bmatrix} p & \alpha(a) \\ & 1 \end{bmatrix} v_0 \text{ であるような } \sigma &\mapsto a \\ t(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & \\ & p \end{bmatrix} v_0 \text{ であるような } \sigma &\mapsto \infty \end{aligned}$$

そこで、 $\text{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi) = \text{Res}_{v_0, D(\sigma)}(\eta^{k-1}\varphi)$  とおく。一般の  $\sigma \in \text{Edge}(\Delta)$  については、 $\text{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi)$  を任意の  $g \in PGL_2(\mathbf{Q}_p)$  に対して、 $\text{Res}_\sigma(\eta^{k-1}g^*\varphi) = \text{Res}_{g\sigma}(\eta^{k-1}\varphi)$  であるように決める。ここで、任意の  $g \in PGL_2(\mathbf{Q}_p)$  に対して、 $g^*\eta = \eta$  であることに注意する。さてこのとき、 $\text{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi) = -\text{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi)$  であり、これは  $V_{o(\sigma), 2k-2} \cap V_{t(\sigma), 2k-2} = V_{\sigma, 2k-2} \subset V_{2k-2}$  に含まれる。

つぎのようにおく。

$$C_{\text{har}}^1(V_{2k-2}) = \left\{ f : \text{Edge}(\Delta) \rightarrow V_{2k-2} \left| \begin{array}{l} f(\bar{\sigma}) = -f(\sigma) \quad (\forall \sigma \in \text{Edge}(\Delta)), \\ \sum_{\substack{\sigma \in \text{Edge}(\Delta) \\ o(\sigma)=v}} f(\sigma) = 0 \quad (\forall v \in \text{Ver}(\Delta)). \end{array} \right. \right\}$$

さて、 $\Gamma$  を  $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$  の discrete subgroup で  $\Gamma \backslash PGL_2(\mathbf{Q}_p)$  が compact であるようなものとする。(torsion-free でなくてもいい。)  $k \geq 1$  に対して、写像

$$I : H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p \longrightarrow C_{\text{har}}^1(V_{2k-2})^\Gamma$$



を  $I(\varphi)(\sigma) = \text{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi)$  によって定義する。すると  $I$  は同型写像である。更に、 $\Gamma$  が torsion-free で算術的であるときは自然な同型  $C_{\text{har}}^1(V_{2k-2})^\Gamma \simeq H^1(\Gamma, V_{2k-2})$  がある ([3])。

$s = s(\alpha_1, \beta_1)^{k_1} \cdots s(\alpha_r, \beta_r)^{k_r}$  と  $\varphi = \varphi_\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_r; k_1, \dots, k_r)$  を前節のようにとる。以下では、 $\sigma \in \text{Edge}(\Delta)$  に対して、 $\text{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi)$  を計算する。

$i = 1, \dots, r$  に対して、 $\rho_{\alpha_i} = \text{Res}_{\alpha_i}(\eta^{k-1}s)$  及び  $\rho_{\beta_i} = \text{Res}_{\beta_i}(\eta^{k-1}s)$  とおく。この residue は  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}_p}^1$  における通常の residue である。

初等的計算によって、

**Proposition 3.1** 次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \rho_{\beta_1} &= \prod_{i=1}^r (\beta_i - \alpha_i)^{k_i} \cdot (-1)^{k_1-1} (u - \beta_1 v)^{2k-k_1-1} \\ &\quad \times \sum \binom{k_1-1+i_1}{i_1} \binom{k_2-1+i_2}{i_2} \binom{k_2-1+j_2}{j_2} \cdots \binom{k_r-1+i_r}{i_r} \binom{k_r-1+j_r}{j_r} \\ &\quad \times \frac{(u - \alpha_1 v)^{i_1} (u - \alpha_2 v)^{i_2} (u - \beta_2 v)^{j_2} \cdots (u - \alpha_r v)^{i_r} (u - \beta_r v)^{j_r}}{(\beta_1 - \alpha_1)^{k_1+i_1} (\beta_1 - \alpha_2)^{k_2+i_2} (\beta_1 - \beta_2)^{k_2+j_2} \cdots (\beta_1 - \alpha_r)^{k_r+i_r} (\beta_1 - \beta_r)^{k_r+j_r}} \end{aligned}$$

ここで、和は  $i_1 + i_2 + j_2 + \cdots + i_r + j_r = k_r - 1$  に関してとるものとする。他の  $\rho_{\alpha_i}$  及び  $\rho_{\beta_i}$  も同様に表わされる。

さて、 $\text{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi)$  は次のようにして計算することができる。 $A = \{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_r, \beta_r\}$  とおく。また、 $r=1$  のとき  $C = \langle \gamma_1 \rangle \backslash \Gamma$ 、 $r \geq 2$  のとき  $C = \Gamma$  とおく。

$\sigma \in \text{Edge}(\Delta)$  に対して、点  $\alpha \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$  で、 $\alpha$  を limit point とする infinite path  $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$  で、ある  $n \geq 1$  に対して  $\sigma = \sigma_n$  となるものが存在するものの全体を  $\Sigma(\sigma)$  と書く。そのとき、

$$\begin{aligned} \text{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi) &= \sum_{\gamma \in C} \text{Res}_\sigma(\gamma^* \eta^{k-1}s) \\ &= \sum_{\gamma \in C} \sum_{\alpha \in \gamma^{-1}A \cap \Sigma(\sigma)} \text{Res}_\alpha(\gamma^* \eta^{k-1}s) \\ &= \sum_{\gamma \in C} \sum_{\gamma\alpha \in A \cap \Sigma(\gamma\sigma)} \gamma^* \text{Res}_{\gamma\alpha}(\eta^{k-1}s) \\ &= \sum_{\gamma \in C} \gamma^* \sum_{\alpha \in A \cap \Sigma(\gamma\sigma)} \rho_\alpha \end{aligned}$$

である。 $\sigma \in \text{Edge}(\Delta)$  に対して、 $f : \text{Edge}(\Delta) \rightarrow V_{2k-2}$  を  $f(\sigma) = \sum_{\alpha \in A \cap \Sigma(\sigma)} \rho_\alpha$  によって定義する。すると、 $\rho_{\alpha_1} + \rho_{\beta_1} + \cdots + \rho_{\alpha_r} + \rho_{\beta_r} = 0$  より  $f(\bar{\sigma}) = -f(\sigma)$  また  $I(\varphi) = \sum_{\gamma \in C} \gamma^* f$  を得る。

まず、 $r = 1$  のときを考える。  $[\alpha_1, \beta_1] = \{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  とおくと、  $f$  は

$$f(\sigma) = \begin{cases} \rho_{\beta_1} & \sigma = \sigma_n \ (n \in \mathbb{Z}) \text{ のとき} \\ \rho_{\alpha_1} & \sigma = \overline{\sigma_n} \ (n \in \mathbb{Z}) \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で与えられる。  $F_1 : \text{Edge}(\Delta) \rightarrow V_{2k-2}$  を

$$F_1(\sigma) = \begin{cases} \rho_{\beta_1} & \sigma = \sigma_n \ (0 \leq n < d_1) \text{ のとき} \\ \rho_{\alpha_1} & \sigma = \overline{\sigma_n} \ (0 \leq n < d_1) \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases} \quad (3.1)$$

で定義する。ここで、  $q_1 \in p\mathbb{Z}_p$  は  $\gamma_1$  の固有値の比で、  $d_1 = \text{ord}_p(q_1)$  とおく。すると、  $F_1$  は compact support を持ち、  $I(\varphi) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* F_1$  である。

次に、  $r \geq 2$  のときを考える。  $v_0$  は原点であった。  $i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) に対して、  $v_i$  を  $[\alpha_i, \beta_i]$  上の頂点で  $\text{dist}(v_0, [\alpha_i, \beta_i]) = \text{dist}(v_0, v_i)$  となるものとする。  $[\alpha_i, \beta_i] = \{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  とし、但し  $\sigma_0 = v_i$  とする。  $\ell_i = \text{dist}(v_0, v_i)$  とおく。  $\tau_0, \dots, \tau_{\ell_i-1}$  を  $v_0$  から  $v_i$  への path とする。  $f_i : \text{Edge}(\Delta) \rightarrow V_{2k-2}$  を

$$f_i(\sigma) = \begin{cases} \rho_{\beta_i} & \sigma = \sigma_n \ (0 \leq n) \text{ のとき} \\ -\rho_{\beta_i} & \sigma = \overline{\sigma_n} \ (0 \leq n) \text{ のとき} \\ -\rho_{\alpha_i} & \sigma = \sigma_n \ (n < 0) \text{ のとき} \\ \rho_{\alpha_i} & \sigma = \overline{\sigma_n} \ (n < 0) \text{ のとき} \\ \rho_{\alpha_i} + \rho_{\beta_i} & \sigma = \tau_m \ (0 \leq m < \ell_i) \text{ のとき} \\ -\rho_{\alpha_i} - \rho_{\beta_i} & \sigma = \overline{\tau_m} \ (0 \leq m < \ell_i) \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定義する。すると、  $f = f_1 + \dots + f_r$  である。  $\rho_{\alpha_i}^{an} = \sum_{n \geq 0} (\gamma_i^{-1})^{*n} \rho_{\alpha_i}$  及び  $\rho_{\beta_i}^{an} = \sum_{n \geq 0} \gamma_i^{*n} \rho_{\beta_i}$  とおく。  $F_i : \text{Edge}(\Delta) \rightarrow V_{2k-2}$  を

$$F_i(\sigma) = \begin{cases} \rho_{\beta_i}^{an} - \rho_{\alpha_i}^{an} + \rho_{\alpha_i} & \sigma = \sigma_n \ (0 \leq n < d_i) \text{ のとき} \\ -\rho_{\beta_i}^{an} + \rho_{\alpha_i}^{an} - \rho_{\alpha_i} & \sigma = \overline{\sigma_n} \ (0 \leq n < d_i) \text{ のとき} \\ \rho_{\alpha_i} + \rho_{\beta_i} & \sigma = \tau_m \ (0 \leq m < \ell_i) \text{ のとき} \\ -\rho_{\alpha_i} - \rho_{\beta_i} & \sigma = \overline{\tau_m} \ (0 \leq m < \ell_i) \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases} \quad (3.2)$$

で定義する。ここで、  $q_i \in p\mathbb{Z}_p$  は  $\gamma_i$  の固有値の比で、  $d_i = \text{ord}_p(q_i)$  とおく。すると、  $F_i$  は compact support を持ち  $I(\varphi) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* (F_1 + \dots + F_r)$  である。  $\sigma \in \text{Edge}(\Delta)$  が

$\bigcup_{i=1}^r [\alpha_i, \beta_i]$  の convex closure に含まれなければ、 $(F_1 + \cdots + F_r)(\sigma) = 0$  であることに注意する。

かくして次を得た。

**Proposition 3.2**  $p$  進 Poincaré 級数  $\varphi_\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_r; k_1, \dots, k_r)$  に対して、写像

$$F_i : \text{Edge}(\Delta) \longrightarrow V_{2k-2}$$

を上記のように決めるとき、 $\sigma \in \text{Edge}(\Delta)$  に対して、 $F_i(\bar{\sigma}) = -F_i(\sigma)$  であり、 $F_i$  は compact support を持ち、

$$I(\varphi_\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_r; k_1, \dots, k_r)) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^*(F_1 + \cdots + F_r)$$

が成り立つ。

$r \geq 2$  のときに、 $\rho_{\alpha_i}^{an}$  及び  $\rho_{\beta_i}^{an}$  は以下の様にして有限の形にできる。簡単のため、 $\alpha_i, \beta_i \neq \infty$  としよう。Proposition 3.1 により  $\rho_{\alpha_i}$  及び  $\rho_{\beta_i}$  は

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha_i} &= \sum_{\substack{m+n=2k-2 \\ m>n}} A_{m,n}^{(i)} (u - \alpha_i v)^m (u - \beta_i v)^n \\ \rho_{\beta_i} &= \sum_{\substack{m+n=2k-2 \\ m<n}} B_{m,n}^{(i)} (u - \alpha_i v)^m (u - \beta_i v)^n \end{aligned}$$

と書かれる。ここで、 $A_{m,n}^{(i)}, B_{m,n}^{(i)} \in \mathbb{Q}_p$  である。

$$\gamma_i^*(u - \alpha_i v)^m (u - \beta_i v)^n = q_i^{(-m+n)/2} (u - \alpha_i v)^m (u - \beta_i v)^n$$

より、等式  $1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}$  ( $|q| < 1$ ) を用いて、

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha_i}^{an} &= \sum_{\substack{m+n=2k-2 \\ m>n}} \frac{A_{m,n}^{(i)}}{1 - q_i^{(m-n)/2}} (u - \alpha_i v)^m (u - \beta_i v)^n \\ \rho_{\beta_i}^{an} &= \sum_{\substack{m+n=2k-2 \\ m<n}} \frac{B_{m,n}^{(i)}}{1 - q_i^{(-m+n)/2}} (u - \alpha_i v)^m (u - \beta_i v)^n \end{aligned} \tag{3.3}$$

を得る。

**Proposition 3.3**  $\theta$  を  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  の体の自己同型とする。各  $i = 1, \dots, r$  について、

$$\alpha_i^\theta = \alpha_i, \quad \beta_i^\theta = \beta_i, \quad q_i^\theta = q_i \quad (3.4)$$

であるか、または

$$\alpha_i^\theta = \beta_i, \quad \beta_i^\theta = \alpha_i, \quad q_i^\theta = q_i^{-1} \quad (3.5)$$

であると仮定する。  $\psi = \prod_{i=1}^r (q_i - q_i^{-1})^{k_i - \delta} \varphi$  とおく。ここで、  $r = 1$  のときは  $\delta = 1$ 、 $r \geq 2$  のときは  $\delta = 0$  とおく。そのとき、

$$I(\psi)(\sigma)^\theta = I(\psi)(\sigma) \quad (\forall \sigma \in \text{Edge}(\Delta))$$

が成り立つ。

#### 4 志村曲線

$B$  を  $\mathbb{Q}$  上の定符号四元数環とする。  $\text{disc}(B)$  をその判別式とする。  $\text{disc}(B)$  を割らない素数  $p$  をとり同型写像  $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\cong} M_2(\mathbb{Q}_p)$  を固定する。

$PGL_2(\mathbb{Q}_p)$  の  $2k$  次の対称テンソル表現  $V_{2k}$  は  $\mathbb{Q}$ -structure  $V_{2k, \mathbb{Q}}$  を持つ。低い次数に対しては、

$$V_{0, \mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$$

$$V_{2, \mathbb{Q}} = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\ker(\text{Tr}_{B/\mathbb{Q}} : B \rightarrow \mathbb{Q}), \mathbb{Q})$$

である。(二次形式の Laplacian を用いる記述については [3] を見よ。)

さて、  $\Gamma$  を  $B^\times / \mathbb{Q}^\times$  の部分群で  $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$  の cocompact discrete subgroup であるものとする。  $C_{\text{har}}^1(V_{2k-2})$  及び  $C_{\text{har}}^1(V_{2k-2})^\Gamma$  は各々  $\mathbb{Q}$ -structure  $C_{\text{har}}^1(V_{2k-2, \mathbb{Q}})$  及び  $C_{\text{har}}^1(V_{2k-2, \mathbb{Q}})^\Gamma$  を持つ。

**Theorem 4.1**  $\Gamma$  は *torsion-free* であると仮定する。  $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma$  及び  $k_1, \dots, k_r \geq 1$  を Section 2 の如きものとする。

$$\psi = \prod_{i=1}^r (q_i - q_i^{-1})^{k_i - \delta} \varphi_\Gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_r; k_1, \dots, k_r)$$

とおく。ここで、  $r = 1$  のときは  $\delta = 1$  であり、  $r \geq 2$  のときは  $\delta = 0$  である。 $k = k_1 + \dots + k_r$  とおく。そのとき、

$$I(\psi) \in H^1(\Gamma, V_{2k-2, \mathbb{Q}})$$

が成り立つ。

*Proof.* Proposition 3.3 による。  $\square$

このような  $\psi$  (または、その  $\mathbf{Q}$ -multiple) を有理化された  $p$  進 Poincaré 級数と呼ぶことにする。  $q_i - q_i^{-1}$  は純虚数である。従って、factor  $\prod_{i=1}^r (q_i - q_i^{-1})^{k_i - \delta}$  は有理数であるか純二次数である。

$\mathcal{O}$  を  $B$  の 極大整環とする。

$$\Gamma(1) = \left\{ \gamma \in \mathcal{O} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \mid N_{B/\mathbf{Q}}(\gamma) = 1 \right\} / \{\pm 1\}$$

とおく。

$\hat{B}$  を  $\mathbf{Q}$  上の不定符号四元数環でその判別式が  $p \cdot \text{disc}(B)$  となるものとする。  $\hat{\mathcal{O}}$  を  $\hat{B}$  の 極大整環とする。

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{O}}^1 &= \{ \gamma \in \hat{\mathcal{O}} \mid N_{\hat{B}/\mathbf{Q}}(\gamma) = 1 \} \\ \widehat{\Gamma(1)} &= \hat{\mathcal{O}}^1 / \{\pm 1\} \end{aligned}$$

とおく。  $\widehat{\Gamma(1)}$  は複素上半平面  $H = \{z = x + y\sqrt{-1} \in \mathbf{C} \mid y > 0\}$  に作用し、その商  $\widehat{\Gamma(1)} \backslash H$  の志村 model を  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  とする ([12, 13])。Čerednik [1, 2] の *theorem of interchanging local invariants* によって、  $K_p$  を  $\mathbf{Q}_p$  の不分岐二次拡大とすると、

$$S_{\widehat{\Gamma(1)}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p \cong (P_{\Gamma(1), \eta} \otimes_{\mathbf{Q}_p} K_p) / (\tau(p) \otimes \sigma)$$

となる ([6, 11] も見よ)。ここで、  $\text{Gal}(K_p/\mathbf{Q}_p) = \{1, \sigma\}$ 、また  $\tau(p)$  は  $p$  に関する Atkin-Lehner involution である。

少し、記号を導入しておく。正整数  $m$  に対して、

$$\begin{aligned} &\{v \in \text{Ver}(\Delta) \mid \text{dist}(v_0, v) = m\} \\ &\cong \mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \\ &= \{(x_1, x_2) \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^2 \mid x_1 \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times \text{ または } x_2 \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times\} / (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times \end{aligned}$$

そこで、  $\Delta$  の頂点  $v$  で  $\text{dist}(v_0, v) = m$  であり その対応する  $\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$  における座標が  $(x_1, x_2)$  となるものを  $(m, x_1, x_2)$  と表わすことにする。

## 5 例

$B$  を判別式が 13 の  $\mathbf{Q}$  上の定符号四元数環とする。伊吹山 [5] によって  $B$  とその極大整環  $\mathcal{O}$  は例えば次のように与えられる。

$$\begin{aligned} B &= \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\alpha + \mathbf{Q}\beta + \mathbf{Q}\alpha\beta, \quad \alpha^2 = -13, \beta^2 = -11, \alpha\beta = -\beta\alpha \\ \mathcal{O} &= \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\frac{1+\beta}{2} + \mathbf{Z}\frac{\alpha(1+\beta)}{2} + \mathbf{Z}\frac{3+\alpha}{11}\beta \end{aligned}$$

そこで、

$$Ibuk(x, y, z, w) = x + y\frac{1+\beta}{2} + z\frac{\alpha(1+\beta)}{2} + w\frac{3+\alpha}{11}\beta \quad (x, y, z, w \in \mathbf{Q})$$

とおくことにする。同型  $B \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_3 \xrightarrow{\cong} M_2(\mathbf{Q}_3)$  を

$$\alpha \mapsto \begin{bmatrix} & 13 \\ -1 & \end{bmatrix}, \quad \beta \mapsto \sqrt{-11} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

によって与える。ここで、 $\sqrt{-11} \in \mathbf{Q}_3$  は  $\sqrt{-11} \equiv 1 \pmod{3}$  ととることにする。

群  $\Gamma(1)$  は torsion-free である。商グラフ  $\Gamma(1) \backslash \Delta$  は 2 個の頂点と 8 個の向き付けられた edge からなる。 $\Delta$  における  $\Gamma(1)$  の基本領域は

$$\{v_0, v_1\} \cup \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

で与えられる。ここで、頂点に関しては

$$v_0 = \text{原点}, \quad v_1 = (1, 1, 0)$$

また、向き付けられた edge に関しては

$$\begin{aligned} e_0 &= [v_0, v_1], & e_1 &= [v_1, v_0], \\ e_2 &= [v_0, (1, 2, 1)], & e_3 &= [v_1, (2, 1, 3)], \\ e_4 &= [v_0, (1, 1, 1)], & e_5 &= [v_1, (2, 1, 6)], \\ e_6 &= [v_0, (1, 0, 1)], & e_7 &= [v_1, (2, 1, 0)] \end{aligned}$$

とおいた。自由群  $\Gamma(1)$  は

$$\gamma_2 = Ibuk(1, -4, -1, 5), \quad \gamma_4 = Ibuk(1, 2, 1, -5), \quad \gamma_6 = Ibuk(2, 1, 0, 0)$$

によって生成される。基本領域の境界にある向き付けられた edge に対しては、

$$e_2 = \gamma_2 \overline{e_3}, \quad e_4 = \gamma_4 \overline{e_5}, \quad e_6 = \gamma_6 \overline{e_7}$$

の様に作用している。  $e_i$  の  $\Gamma(1) \backslash \Delta$  への像を  $\dot{e}_i$  と書く。  $\varphi(\cdot) = \varphi_{\Gamma(1)}(\cdot)$  と書くことにして、

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi(\dot{e}_0 + \dot{e}_7; 1), \\ \varphi_2 &= \varphi(\dot{e}_3 + \dot{e}_4; 1), \\ \theta &= \varphi(\dot{e}_0 + \dot{e}_3 + \dot{e}_5 + \dot{e}_6; 1), \\ \chi &= \frac{\sqrt{-299}}{13} \{ -\varphi(\{\dot{e}_0, \dot{e}_3, \dot{e}_6, \dot{e}_5\}; 2) + \varphi(\{\dot{e}_0, \dot{e}_5, \dot{e}_6, \dot{e}_3\}; 2) \}\end{aligned}$$

を考える。  $k \geq 0$  について、  $M_{2k}(\Gamma(1)) = H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbb{Z}_p}^{\otimes k})^{\Gamma(1)} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$  と書くことにする。すると、  $\varphi_1, \varphi_2, \theta$  は  $M_2(\Gamma(1))$  の基底である。 Atkin-Lehner involution  $\tau(3)$ ,  $\tau(13)$  及び Hecke 作用素  $T(5)$  は

$$\tau(3)^* \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \theta \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\tau(13)^* \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \theta \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$T(5) \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \\ 2 & -2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

の様に作用している。

$$\varphi_1^e = \varphi_1 + (-1 + \sqrt{2})\varphi_2, \quad (5.9)$$

$$\varphi_2^e = \varphi_1 + (-1 - \sqrt{2})\varphi_2$$

とおと、  $\varphi_1^e, \varphi_2^e$  は common eigenform となる。  $\varepsilon_3, \varepsilon_{13} = \pm 1$  に対して、  $(2, 2)$  型 Abel 群  $\langle \tau(3), \tau(13) \rangle \subset \text{Aut}(S_{\widehat{\Gamma(1)}})$  の  $\tau(3) \mapsto \varepsilon_3, \tau(13) \mapsto \varepsilon_{13}$  となる 1-次元表現を  $\begin{Bmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix}$

と書くことにする。すると、  $\chi \in M_4(\Gamma(1))$  であり、

$$M_4(\Gamma(1)) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\chi \in \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

となる。

$P_{\Gamma(1)}/\tau(39)$  の genus は 0 である。従って、 $P_{\Gamma(1)}$  は hyperelliptic curve でその方程式は

$$\theta^2 = A_0^e \varphi_1^{e^2} + A_1^e \varphi_1^e \varphi_2^e + A_2^e \varphi_2^{e^2}, \quad (5.12)$$

$$\chi^2 = B_0^e \varphi_1^{e^4} + B_1^e \varphi_1^{e^3} \varphi_2^e + B_2^e \varphi_1^{e^2} \varphi_2^{e^2} + B_3^e \varphi_1^e \varphi_2^{e^3} + B_4^e \varphi_2^{e^4}$$

の形をしている。ここで、 $A_i^e, B_j^e \in \mathbf{Q}_3(\sqrt{2})$  である。

さて、志村 [12] によって、

$$\frac{A_0^e A_2^e}{A_1^{e^2}}, \frac{B_1^e B_3^e}{B_2^{e^2}} \in \mathbf{Q}, \quad \frac{B_2^e B_4^e}{B_3^{e^2}}, \frac{A_0^e B_3^e}{A_1^e B_2^e} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$$

である。

$\varphi_1, \varphi_2, \theta, \chi$  の  $v_0$  における *local expansion* を modulo  $3^{15}$  で計算することにより、

$$\begin{aligned} \frac{A_0^e A_2^e}{A_1^{e^2}} &= \frac{1}{3^2} [3587231 \bmod 3^{14}] \\ \frac{B_1^e B_3^e}{B_2^{e^2}} &= [11208842 \bmod 3^{15}] \\ \frac{B_2^e B_4^e}{B_3^{e^2}} &= [5778707 \bmod 3^{15}] + 3^2 [778036 \bmod 3^{13}] \sqrt{2} \\ \frac{A_0^e B_3^e}{A_1^e B_2^e} &= [1594322 \bmod 3^{13}] + \frac{1}{3} [3776030 \bmod 3^{14}] \sqrt{2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

を得る。一方、 $\text{disc}(B) = 3, p = 13$  の場合にも同様な計算をして、

$$\begin{aligned} \frac{A_0^e A_2^e}{A_1^{e^2}} &= [1220101 \bmod 13^7] \\ \frac{B_1^e B_3^e}{B_2^{e^2}} &= [7300382 \bmod 13^7] \\ \frac{B_2^e B_4^e}{B_3^{e^2}} &= [12310392 \bmod 13^7] + [53516622 \bmod 13^7] \sqrt{2} \\ \frac{A_0^e B_3^e}{A_1^e B_2^e} &= [62748516 \bmod 13^7] + [27521280 \bmod 13^7] \sqrt{2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

を得る。これらから、次のように推測する。

$$\begin{aligned} \frac{A_0^e A_2^e}{A_1^{e^2}} &= \frac{17}{2^2 3^2} \\ \frac{B_1^e B_3^e}{B_2^{e^2}} &= \frac{2^2 47}{19^2} \\ \frac{B_2^e B_4^e}{B_3^{e^2}} &= \frac{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19^2}{2^3 47^2} + \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19}{47^2} \sqrt{2} \\ \frac{A_0^e B_3^e}{A_1^e B_2^e} &= -1 + \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 19} \sqrt{2} \end{aligned} \quad (\text{H})$$



以下では、これを仮定する。

$\mathbf{Q}_3$  の不分岐二次拡大  $K_3$  の元  $\omega$  で  $K_3 = \mathbf{Q}_3(\omega)$ ,  $\omega^2 \in \mathbf{Q}_3$  となるものを固定しておく。  
 (5.6), (5.11) により、 $C_{\varphi_1^e}, C_{\varphi_2^e} \in \mathbf{Q}_3(\sqrt{2})^\times = K_3^\times$ ,  $C_\theta, C_\chi \in \omega \mathbf{Q}_3^\times$  であって、 $C_{\varphi_1^e}$  と  $C_{\varphi_2^e}$  は  $\mathbf{Q}_3$  上共役で

$$\begin{aligned} C_{\varphi_1^e} \varphi_1^e, C_{\varphi_2^e} \varphi_2^e &\in H^0(\widehat{S_{\Gamma(1)}}, \omega_{\widehat{S_{\Gamma(1)}}}/\mathbf{Q}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{2}), \\ C_{\varphi_1^e} \varphi_1^e, C_{\varphi_2^e} \varphi_2^e &\text{ は } \mathbf{Q} \text{ 上共役,} \\ C_\theta \theta &\in H^0(\widehat{S_{\Gamma(1)}}, \omega_{\widehat{S_{\Gamma(1)}}}/\mathbf{Q}), \\ C_\chi \chi &\in H^0(\widehat{S_{\Gamma(1)}}, \omega_{\widehat{S_{\Gamma(1)}}}^{\otimes 2}/\mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

となるものが存在する。(5.12) より  $C_{\varphi_1^e} \varphi_1^e, C_{\varphi_2^e} \varphi_2^e, C_\theta \theta, C_\chi \chi$  の満たす  $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$  に係数を持つ方程式を得る。

$$(C_\theta \theta)^2 = \frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_1^e}^2} A_0^e (C_{\varphi_1^e} \varphi_1^e)^2 + \frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_1^e} C_{\varphi_2^e}} A_1^e (C_{\varphi_1^e} \varphi_1^e) (C_{\varphi_2^e} \varphi_2^e) + \frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_2^e}^2} A_2^e (C_{\varphi_2^e} \varphi_2^e)^2 \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} (C_\chi \chi)^2 &= \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^4} B_0^e (C_{\varphi_1^e} \varphi_1^e)^4 + \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^3 C_{\varphi_2^e}} B_1^e (C_{\varphi_1^e} \varphi_1^e)^3 (C_{\varphi_2^e} \varphi_2^e) \\ &\quad + \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^2 C_{\varphi_2^e}^2} B_2^e (C_{\varphi_1^e} \varphi_1^e)^2 (C_{\varphi_2^e} \varphi_2^e)^2 \\ &\quad + \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e} C_{\varphi_2^e}^3} B_3^e (C_{\varphi_1^e} \varphi_1^e) (C_{\varphi_2^e} \varphi_2^e)^3 + \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_2^e}^4} B_4^e (C_{\varphi_2^e} \varphi_2^e)^4 \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_1^e} C_{\varphi_2^e}} A_1^e, \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^2 C_{\varphi_2^e}^2} B_2^e \in \mathbf{Q}$  である。更に、 $\frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_1^e}^2} A_0^e$  と  $\frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_2^e}^2} A_2^e, \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^4} B_0^e$  と  $\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_2^e}^4} B_4^e, \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^3 C_{\varphi_2^e}} B_1^e$  と  $\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e} C_{\varphi_2^e}^3} B_3^e$  は  $\mathbf{Q}$  上共役である。(H) によって、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_1^e}^2} A_0^e &= (-1 + 3\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})\alpha, \\ \frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_1^e} C_{\varphi_2^e}} A_1^e &= 2 \cdot 3a, \\ \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^3} B_0^e &= 5 \cdot 7(-1 - \sqrt{2})^2 \frac{\alpha^2 b}{a^2}, \\ \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^3 C_{\varphi_2^e}} B_1^e &= 2^2(-1 - \sqrt{2})(9 + 8\sqrt{2}) \frac{\alpha b}{a}, \\ \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^2 C_{\varphi_2^e}^2} B_2^e &= 2 \cdot 19b, \end{aligned} \quad (5.17)$$

ここで、 $\alpha \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 、 $a, b \in \mathbf{Q}$  であり、 $\alpha\alpha' = a^2$  となっている。 $(\alpha'$  は  $\alpha$  の  $\mathbf{Q}$  上の共役。) $d \in \mathbf{Q}$  と  $\delta \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$  で  $a = d\delta\delta'$  で  $\alpha = d\delta^2$  であるものがある。 $\Phi_1, \Phi_2$  を

$$\delta C_{\varphi_1^e} \varphi_1^e = \Phi_1 + (1 + \sqrt{2})\Phi_2 \quad (5.18)$$

$$\delta' C_{\varphi_2^e} \varphi_2^e = \Phi_1 + (1 - \sqrt{2})\Phi_2$$

とおく。更に、 $d_1 = 1/8d$  及び  $d_2 = a^2/16bd^2$  とおく。すると、方程式 (5.16) は

$$d_1(C_\theta\theta)^2 = 2\Phi_1^2 + 6\Phi_1\Phi_2 + 5\Phi_2^2 \quad (5.19)$$

$$d_2(C_\chi\chi)^2 = (3\Phi_1^2 + 12\Phi_1\Phi_2 + 13\Phi_2^2)(\Phi_1^2 + 12\Phi_1\Phi_2 + 39\Phi_2^2)$$

となる。 $\mathbf{Z}[\sqrt{-13}]$ ,  $\mathbf{Z}[\sqrt{-39}]$ ,  $\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{-39}}{2}]$  の  $\widehat{\mathcal{O}}$  への optimal embedding に対応する  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  上の点を各々  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ ,  $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ ,  $\{Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4\}$  とすると、

$$\text{div}(\theta) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

$$\text{div}(\chi) = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q'_1 + Q'_2 + Q'_3 + Q'_4$$

であることが分かる。ここで、 $\text{div}$  は  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  上でとる。志村 [12], 3.2. Main Theorem I, により

$$\mathbf{Q}(\sqrt{-13}, P_1) = \mathbf{Q}(\sqrt{-13}, \sqrt{-1}, \sqrt{13d_2})$$

$$\mathbf{Q}(\sqrt{-39}, Q_1) = \mathbf{Q}(\sqrt{-39}, \sqrt{-3}, \sqrt{-d_1(1 - 2\sqrt{-3})})$$

は各々  $\mathbf{Q}(\sqrt{-13})$  及び  $\mathbf{Q}(\sqrt{-39})$  の Hilbert class field である。これより、

$$d_1 = (-3)^0 \text{ または } 1_{13}^0 \text{ または } 1 \pmod{\mathbf{Q}^{\times 2}},$$

$$d_2 = (-1)^0 \text{ または } 1_{13}^0 \text{ または } 1 \pmod{\mathbf{Q}^{\times 2}}$$

を得る。(5.13), (5.17) より、 $d_1 \in 3^{2\mathbf{Z}}\mathbf{Z}_3^\times$ ,  $d_2 \in -1 \cdot \mathbf{Q}_3^{\times 2}$  が得られる。同様に、 $\text{disc}(B) = 3$ ,  $p = 13$  の場合より、 $d_1 \in 13^{2\mathbf{Z}}\mathbf{Z}_{13}^\times$ ,  $d_2 \in -1 \cdot \mathbf{Q}_{13}^{\times 2}$  を得る。従って、 $d_1 \in \mathbf{Q}^{\times 2}$ ,  $d_2 \in -1 \cdot \mathbf{Q}^{\times 2}$ 。  $d_1 = k_1^2$ ,  $d_2 = -k_2^2$  ( $k_1, k_2 \in \mathbf{Q}^\times$ ) とおき、更に  $\Theta = k_1 C_\theta \theta$  及び  $X = k_2 C_\chi \chi$  とおくと仮定 (H) の下で志村曲線  $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$  の方程式を得る。

$$\Theta^2 = 2\Phi_1^2 + 6\Phi_1\Phi_2 + 5\Phi_2^2 \quad (5.20)$$

$$X^2 = -(3\Phi_1^2 + 12\Phi_1\Phi_2 + 13\Phi_2^2)(\Phi_1^2 + 12\Phi_1\Phi_2 + 39\Phi_2^2)$$

## 参考文献

- [1] I. V. Čerednik, Towers of algebraic curves uniformized by discrete subgroups of  $PGL_2(k_w) \times E$ , Math. USSR-Sb. **28** (1976), 187–215.
- [2] I. V. Čerednik, Uniformization of algebraic curves by discrete arithmetic subgroups of  $PGL_2(k_w)$  with compact quotients, Math. USSR-Sb. **29** (1976), 55–78.
- [3] E. de Shalit, Eichler cohomology and periods of modular forms on  $p$ -adic Schottky groups, J. reine angew. Math. **400** (1989), 3–31.
- [4] K. Hashimoto and N. Murabayashi, Shimura curves as intersection of Humbert surfaces and defining equations of QM-curves of genus two, preprint.
- [5] T. Ibukiyama, On maximal orders of division quaternion algebras over the rational number field with certain optimal embeddings, Nagoya Math. J. **88** (1982), 181–195.
- [6] B. W. Jordan and R. A. Livné, Local Diophantine properties of Shimura curves, Math. Ann. **270** (1985), 235–248.
- [7] A. Kurihara, On some examples of equations defining Shimura curves and the Mumford uniformization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **25** (1979), 277–300.
- [8] Yu. I. Manin and V. G. Drinfel'd, Periods of  $p$ -adic Schottky groups, J. reine angew. Math. **262/263** (1973), 239–247.
- [9] Y. Morita, Reduction modulo  $\mathfrak{p}$  of Shimura curves, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 209–238.
- [10] D. Mumford, An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, Compositio Math. **24** (1972), 129–174.
- [11] A. P. Ogg, Mauvaise réduction des courbes de Shimura. In: Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1983–84 (Progress in Math., vol. 59, pp. 199–217) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1985.
- [12] G. Shimura, Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves, Ann. Math. **85** (1967), 58–159.

- [13] G. Shimura, On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, *Ann. Math.* **91** (1970), 144–222.